PREFACE

La théorie des distributions apparait sans doute pour la premiére fois dans les travaux de l'ingénieur Heaviside mais elle apparait comme un moyen commode de faire certains calculs et est mal comprise par ses contemporains. Les physiciens l'utilisent néanmoins avec un certain succés. En particulier avec Dirac qui l'utilise pour modéliser certains phénoménes physiques où l'énergie se concentrent dans un espace trés réduit. En effet les fonctions se prêtent assez mal à ce type d'expérience que l'on peut en gros regarder comme une limite d'un phénoméne du type suivant: soit une répartition de mesure unidimensionelle notée comme une fonction définie sur $[-h, h]$ avec une dérivée d_h ayant les propriétés suivantes:

$$\forall x \in [-h, h] \;\; d_h(x) \geq 0, \;\; \forall x \in [-h, h] \in \mathbb{R} - [-h, h] \;\; d_h(x) \geq 0, \;\; \int d_h = 1$$

et si on fait tendre h vers 0, on a une fonction d_h nulle sur $\mathbb{R}^*$ et $\int_{\{0\}} d\lambda = 1$. Or l'intégrale d'une fonction positive sur un ensemble négligeable donne 0 et on a une contradiction. Le choc entre deux solides peut aussi se modéliser de cette maniére. Dans un premier temps le physicien DIRAC imagine contre toute logique une fonction impulsion vérifiant

$$imp = (+\infty)\, \chi_{\{0\}} \quad \text{et} \quad \int imp = 1.$$

Sans se préoccuper de savoir si un tel être existe, il définit ensuite

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} imp(t)\, dt = H(x)$$

où H est la fonction d'heaviside. Alors si f est dérivable, on a:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} imp(t)\, f(t)\, dt = [uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int uf' = \lim_{x \to +\infty} f - \int_{0}^{+\infty} f'(x) = f(0).$$

La valeur de f en 0 apparait comme une intégrale et traduit ainsi la localisation de la masse en 0.

En outre, si on modélise l'établissement d'un courant électrique constant par la fonction d'Heaviside obtenue comme limte d'une fonction égale à 1 pour $x > h$ et nulle pour $x < h$ et raccordeé par continuité entre $-h$ et h et la déivée vérifiera les conditions de la fonction imp. D'un point de vue physique cette dérivée est plus satisfaisante que la dérivée mathématique.

Les mathématiciens avaient déja observé que la valeur d'une fonction en un point pouvait être considérée comme une intégrale avec la théorie de la mesure mais il fallut attendre 1946 pour que le mathématicien Laurent SCHWARTZ construise une théorie compléte de ces nouveaux objets prenant en compte les deux aspects précédents en particulier en généralisant la dérivation et en absorbant le concept de dérivée généralisée intoduite en 1936 par SOBOLEV. Généralisant le concept de fonction qui deviendront les distributions réguliéres, et en introduisant les distributions singuliéres dont la distribution et le peigne de Dirac font partie et introduisant un concept de dérivation au sens des distributions global et non plus locale comme c'était le cas, SCHWARTZ fut à l'origine d'une petite révolution dans l'analyse de son temps. On imagine volontiers la stupeur dans le monde des mathématiciens de l'époque lorsque se répandit que toutes les fonctions étaient indéfiniment dérivables. Si SCHWARTZ et GUELFAND passent pour les inventeurs des distributions il ne faut pas oublier que pendant tout le début du XX iéme siécle un ingenieur HEAVISIDE et un physicien DIRAC tous deux anglais utlisérent un calcul symbolique assez obscure mais trés efficace, dont on a un peu parlé avant, qu'ils maniérent avec beucoup de virtuosité pour rendre compte de certains phénoménes physique et qu'ils furent les premiers à utiliser les distributions. En outre c'est Sobolev qui a introduit le concept de fonctions généralisées qu'on appellera plus tard distibution. On peut dire que c'est Sobolev qui a inventé les distributions et Shwartz qui a créé la théorie des distributions. Dans les deux cas il fallait le faire.

La théorie dans un premier temps apparait trés sophistiquée ne serait ce que par l'usage intensif de l'intégrale de Lebesgue et de la toplologie définie par des familles de semi-norme. Son utilisation est plus aisée et est souvent source de simplifications. Une distribution est indéfiniment dérivable. Une série divergente au sens usuel sera souvent convergente au sens des distributions et les transformations de Fourier et de Fourier-Plancherel verront leurs domaines d'applications s'élargir et le produit de convolution possédera un élément neutre.

Il semble que l'intéret fondamental des distributions dans le domaine pratique réside dans la définition de la distribution de Dirac qui apparait comme une forme linéaire définie sur un espace vectoriel dont les objets sont des fonctions et dans la possibilité de définir l'idée d'un combinaison linéaire indexée sur $\mathbb{Z}$ de distribution de Dirac comme par exemple

$$\bigsqcup_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}$$

qui appliquée à f donnerait

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)$$

et qui permet d'échantillonner le signal continue f. Il convient donc de définir l'espace fonctionnel des objets f dit espace des fonctions tests que l'on note $\mathcal{D}$ qui aura une structure d'espace vectoriel et son dual topologique $\mathcal{D}'$ dit espace des distributions car on veut disposer de la continuité tout en observant que plus l'espace test est petit plus l'espace des distributions sera grand contrairement à ce qui se passe lorsqu'on est en dimension finie. Donc le choix des fonctions tests sera un élément trés important et selon les besoins nous ferons un choix particulier de cet espace. Une de nos préoccupations importantes sera de conserver dans tous les cas la distribution de Dirac et les distributions $\bigsqcup_a$. Nous verrons que les propriétés spécifiques des fonctions de l'espace test permettront de définir des opérations sur l'espace des distributions par le biais du crochet de dualité. On pourra réaliser un pont entre la transformation de Fourier et les séries de Fourier.

Reste que pour des utilisateurs on ne peut développer toute la théorie. En remplaçant les concepts topologiques qui ménent à une caractérisation de la limite d'une suite dans l'espace des fonctios tests et en prenant cette caractérisation comme définition on réduit considérablement l'aspect topologique du problème tout en préservant et conservant les outils topologiques nécessaires à la compréhension du sujet. Ce pas pédagogique important met les distributions à la portée de celui qui ne s'intéresse qu'aux applications de cette théorie comme c'est le cas de la pluspart des ingénieurs et c'est ce point de vue que nous adoptons dans ce petit cours.

1.1 Convergence dans l'espace des fonctions tests

L'espace des fonctions tests dans un premier temps sera de choisir des objets mathématiques extrêmement souples adapptés à joer un rôle d'objets tests pour analyser des phénoménes physiques à évolution douce tels les amortissements que brutales tels les chocs. Le cadre C^{∞} se prête bien pour jouer ce rôle.

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des applications indéfiniment différentiables est muni d'une topologie que l'on définira à partir des convergences de suite. Cela donne la définition suivante:

Definition 1.1 *On dit que la suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0, ssi, il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le support de φ_n soit inclus dans K et tel que la suite $\left(\partial^p_{i_1,\dots,i_k}\varphi_n\right)$ converge uniformément vers 0 sur K pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $i_1,\dots,i_k \in \mathbb{N}$ vérifiant $i_1+\dots+i_k = p$ et que la suite φ_n d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tend vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ssi $\varphi_n - \varphi$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on notera:*

$$\varphi_n \underset{\mathcal{D}}{\rightarrow} \varphi.$$

Remarque 1.1 *Cette définition peut paraitre assez lourde en raison surtout de l'introduction du compact mais nous aurons l'occasion de voir que si on ne l'introduit pas certaines distributions trés importantes comme le train de Dirac ne vérifieront pas la définition. C'est pourquoi nus l'appellerons compact de sécurité de la suite (φ_n).*

Remarque 1.2 *On peut enlever dans la définition le sur K car $\sup_{\mathbb{R}^n}\left|\partial^p_{i_1,\dots,i_k}\varphi_n\right| = \sup_K\left|\partial^p_{i_1,\dots,i_k}\varphi_n\right|$.*

Proposition 1.1 *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ne se réduit pas à l'ensemble vide.*

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \theta(t) = \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right)\chi_{]-1,1[}$$

et, si $a \in \mathbb{R}^n$

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \quad \theta_{n;a,r}(z) = \frac{\theta\left(\frac{\|z-a\|}{r}\right)}{r^n\int_{\mathbb{R}^n}\theta(\|u\|)\chi_{B'(O,1)}du_1\dots du_n}.$$

Il est assez fastidienx mais facile de vérifier que $\theta_{n;a,r} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Le résultat qui suit est plus technique mais montre la souplesse de l'espace test choisi.

Proposition 1.2 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$; il existe une fonction $\rho_{U,K}$ appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[0,1]$ égale à 1 sur K et de support inclus dans U.*

Definition 1.2 *Une fonction vérifiant la propriété suivante est dite fonction plateau subordonnée au compact K.*

Theoreme 1.3 *Soit $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{I}}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que la réunion des Ω_i doit $\mathbb{R}^n$, telle que pour tout entier i Ω_i soit bornée et telle que tout point de $\mathbb{R}^n$ posséde un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini dr Ω_i. Alors il existe une famille $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $i\in\mathbb{I}$ le support de φ_i soit inclus dans Ω_i, $0\leq\varphi_i\leq 1$ et*

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \sum_{i\in\mathbb{I}}\varphi_i(x)=1$$

où $\mathbb{I}$ est dénombrable.

Definition 1.3 *La famille $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est appelée partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{I}}$*

Exercice 1 *Construire une fonction plateau de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support inclus dans $\left[0,\frac{5}{3}\right]$ égale à 1 sur $\left[\frac{2}{3},1\right]$ et telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tau_n\rho=1$$

On prend $U=\left]0,\frac{5}{3}\right[$ et $K=\left[\frac{2}{3},1\right]$. On pose alors

$$\rho(t)=\begin{cases}\rho_{U,K}(t) & si\ \ t\in\left[\frac{2}{3},1\right]\\ 1-\rho_{U,K}(t) & si\ \ t\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\\ 0 \quad si & t\notin\left]0,\frac{5}{3}\right[\end{cases}$$

Il est alors assez facile de vérifier que $\rho\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\frac{5}{6}$ et que

$$\forall t\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \quad \rho(t)+\rho(t+1)=1.$$

On pose $\rho_n=\tau_n\rho$ et $\Omega_n=\left]n,n+\frac{5}{3}\right[$ et $\mathbb{Z}=\mathbb{I}$ et

$$h(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho_n$$

On observe que h est $1-$périodique et que

$$\begin{aligned} 0 &\leq t\leq\frac{2}{3} \quad h(t)=\rho(t)+\rho(t+1)=1\\ \frac{2}{3} &\leq t\leq 1 \quad h(t)=\rho(t)=1\end{aligned}$$

et donc on exhibe ainsi une partition de l'unité subordonnée à $\left(\left]n,n+\frac{5}{3}\right[=\Omega_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Cette exercice est important dans la mesure où il permet d'avoir une preuve intéressante pour déterminer la transformation de Fourier du peigne de Dirac.

1.2 Espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

L'espace des fonctions tests a été choisi suffisamment souple pour que les phénoménes physiques d'évolution quelconque rapide voire brutale ou lente puisse être testé sur des objets suffisamment "mou" et que l'effet de ces phénoménes puisse être numériquement quantifiable. Il faut en outre que la bibliothéque d'objets tests soit assez riche pour permettre l'analyse locale des phénomènes. C'est ce que l'introduction des fonction plateaux permet d'envisager. Dés lors nous pouvons introduire la définition suivante.

Definition 1.4 *On appelle distribution une élément du dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. C'est donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Notation: Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on pose:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle .$$

1.3 Distributions Réguliéres, Distributions Singuliéres

Theoreme 1.4 *Soit f une fonction localement intégrable et $\varphi; \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; on pose:*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f\varphi.$$

Alors T_f est une distribution.
Proof. *La fonction $f\varphi$ vérifie:*

$$|f\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty f\chi_{\sup p\varphi}$$

et $\|\varphi\|_\infty f\chi_{\sup p\varphi}$ est intégrable car f est intégrable sur le compact $\sup p\varphi$. La linéarité est évidente et enfin on a:

$$|\langle T_f, \varphi_n \rangle| \leq \|\varphi_n\|_{\infty,K} \int |f|$$

et donc

$$\langle T_f, \varphi_n \rangle \to 0.$$

Definition 1.5 *On dit qu'une distribution T est réguliére, ssi, il existe une fonction localement intégrable f telle que $T = T_f$ et f est alors dite densité de cette distribution. Une distribution singuliére est une distribution qui n'est pas réguliére.*

Proposition 1.5 *(de localisation) La distribution $T_f = 0$, ssi, $f = 0$ pp.*

Les distributions réguliéres permettent de considérer d'une certaine maniére les distributions comme une généralisation des fonctions et on les appelle dans certains ouvrages les fonctions généralisées. La proposition précédente permet d'identifier f et T_f.

Definition 1.6 *On appelle distribution de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$, l'application qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ associe $\varphi(a)$ et distribution atomique une distribution de la forme:*

$$T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \delta_{na}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Theoreme 1.6 *Une distribution de Dirac est une distribution singuliére et une distribution atomique est une distribution singuliére.*

Proof. *La convergence dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *entraine la convergence simple et donc* δ_a *est une distribution. Nous établissons la singularité dans le cas* $n = 1$ *mais cela se généralise sans grandr difficulté. L'idée consite à montrer que* $f = 0$ *presque partout sur* $\mathbb{R}^n - \{a\}$ *ou* $\mathbb{R}^n - \{na; n \in \mathbb{Z}\}$ *donc sur* $\mathbb{R}^n$ *s'il existait* f *localement intégrable telle que* $\delta_a = T_f$. *S'il existait* f *localement intégrable telle que* $\delta_a = T_f$, *alors pour toute fonction test* φ *dont le support serait inclus dans* $\mathbb{R} - \{a\}$, *on aurait:*

$$\int f\varphi = \varphi(a) = 0.$$

Donc pour tout segment S *inclus dans* $\mathbb{R} - \{a\}$ *en prenant une fonction plateau subordonnée au compact* S, *on a:*

$$\int_S f = 0.$$

En prenant $f_n = f\chi_{\left[c,a-\frac{1}{n}\right]}$, *on a:* $|f_n| \leq f\chi_{(c,a)}$, $f_n \to f\chi_{(c,a)}$ *et* $\int f_n = \int_{\left[c,a-\frac{1}{n}\right]} f = 0$. *On applique le théorème de la convergence dominée et on a:*

$$\int_{[c,a]} f = 0.$$

De même

$$\int_{[a,c]} f = 0$$

et donc

$$\forall S \;\; \text{segment} \subset \mathbb{R} \quad \int_S f = 0.$$

Donc, pour toute fonction test par exemple une fonction plateau subordonnée au compact $S = \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right]$

$$0 = \int_S f = \varphi(a) = 1.$$

C'est absurde.

Pour une distribution atomique, la démonstration se fait de la même maniére.

Remarque 1.3 *Comme la plupart des phénoménes physiques que l'on veut représenter se modélisent avec des distributions de Dirac, ce sont les distributions singuliéres qui vont jouer un rôle prépondérant. Nous verrons par la suite que la distributions de Dirac est limite au sens des distributions de distributions réguliéres qui sont des fonctions plateaux et on comprendra comment l'intuition physique représenté par la fonction impulsion de Dirac est justifié.*

Remarque 1.4 *Dans la préface, on avait indiqué qur le choix de convergence dans l'espace des fonctions tests était en partie due à des raisons physiques. A travers l'exemple qui suit nous allons le justifier en partie. Considérons la fonction plateau suivante:*

$$\varphi_0(t) = \exp\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)\chi_{]-1,1[}(t) = \exp\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\chi_{]-1,1[}(t)$$

qui est une fonction test vérifiant

$$\varphi_0^{(k)}(\pm 1) = 0.$$

Donc

$$\left\|\varphi_0^{(k)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{[-1,1]} |\varphi_0| = M_k < +\infty$$

et posons

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\left(dil_{\frac{1}{n}}\varphi_0\right)(t) = \frac{1}{n}\exp\left(\frac{t^2}{t^2-n^2}\right)\chi_{]-n,n[}(t).$$

On observe que

$$\varphi_n^{(k)}(t) = \frac{\varphi_0^{(k)}\left(\frac{t}{n}\right)}{n^{k+1}}$$

et donc

$$\left\|\varphi_n^{(k)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{M_k}{n^{k+1}}$$

et donc

$$\varphi_n^{(k)} \underset{\mathbb{R}}{\overset{U}{\rightarrow}} 0.$$

Soit, alors $T = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \delta_n$. *On a:*

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi_m\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_m(n) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left(\frac{n^2}{n^2-m^2}\right) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left(\frac{\frac{n^2}{m^2}}{\frac{n^2}{m^2}-1}\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\varphi_0\left(\frac{n}{m}\right) \underset{m\rightarrow+\infty}{\rightarrow} \int_0^1 \varphi_0(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Si on adoptait la continuité avec la CVU sur tout compact dans l'espace test, alors la continuité de T impliquerait que $\int_0^1 \varphi_0(t)\,dt. = 0$. C'est absurde et donc T ne serait pas une distribution. Une bonne partie des retombées pratiques ayant trait à l'échantillonnage disparaitrait.

Remarque 1.5 *Si les distributions étaient introduites convenablement d'un point de vue mathématique en explicitant les topologies utilisées, la définition séquentielle de la limite dans l'espace des fonctions tests appraitrait comme un théorème.*

Le critére le plus commode pour montrer qu'un objet est une distribution est le suivant.

Theoreme 1.7 *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}$ est une distribution ssi*

$$\forall K \text{ compact, } \exists C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall\varphi \in \mathcal{D}\ \operatorname{supp}\varphi \subset K \quad \langle T, \varphi\rangle \leq C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_K |D^\alpha\varphi|.$$

Proof. $\Rightarrow$ est facile car si $\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} 0$, alors $D^\alpha\varphi_n \underset{K}{\overset{U}{\rightarrow}} 0$ où K est un compact sécuritaire pour la suite (φ_n) et $\langle T, \varphi_n\rangle \rightarrow 0$. Pour $\Leftarrow$ c'est plus rusé et nous procéderons par l'absurde. Soit K un compact tel que pour tout C et tout k il existe φ de support inclus dans K et tel que $\langle T, \varphi\rangle > C\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_K |D^\alpha\varphi|$. Alors on prend $k = C = j$ et

$\varphi_j \in \mathcal{D}$ de support inclus dans K telle que

$$\left\langle T, \varphi_j \right\rangle > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K \left| D^\alpha \varphi_j \right|$$

et posons

$$\psi_j = \frac{\varphi_j}{\left\langle T, \varphi_j \right\rangle}$$

de sorte que

$$\left\langle T, \psi_j \right\rangle = 1$$

et on a:

$$1 = \left\langle T, \psi_j \right\rangle > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K \left| D^\alpha \psi_j \right|$$

et

$$\forall \alpha \ \ |\alpha| \leq j \ \ \sup_K \left| D^\alpha \psi_j \right| < \frac{1}{j}$$

On observe alors que

$$\sup p \psi_j \subset \sup p \varphi, \forall \alpha \ \ D^\alpha \psi_j \underset{K}{\overset{U}{\to}} 0$$

et on

$$\psi_j \overset{\mathcal{D}}{\to} 0 \text{ et } \left\langle T, \psi_j \right\rangle = 1 \to 1 \neq 0$$

et T n'est pas une distrubution.

1.4 Support d'une distribution

Definition 1.7 *On appelle support d'une distribution T le complémentaire du plus grand ouvert Ω sur lequel $T = 0$. En fait c'est l'intersection des complémentaires des ouverts sue lequel $T = 0$.*

Proposition 1.8 *Le support de δ_a est $\{a\}$, de $\sum_{a \in P} \alpha_a \delta_a$ où pour tout $a \in P$ $\alpha_a \neq 0$ est P et de T_f le supposrt de f.*

1.5 Convergence au sens des distributions

Definition 1.8 *Soit (T_n) une suite de distribtions et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; on dit que T_n tend vers T, ssi, pour toute fonction test φ la suite $(\langle T_n, \varphi \rangle)$ tend vers $\langle T, \varphi \rangle$. On note $T_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} T$*

Theoreme 1.9 *On a les deux résultats de convergence suivant: Si la suite de fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ noté (f_n) converge uniformément localement vers f, alors $T_{f_n} \overset{\mathcal{D}'}{\to} T_f$. Si $f_n \overset{L^1}{\to} f$, alors $T_{f_n} \overset{\mathcal{D}'}{\to} T_f$.*

Proof. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a:

$$|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle| \leq \int |f - f_n| \, |\varphi| = \int_K |f - f_n| \, |\varphi| \leq \lambda(K) \, \|\varphi\|_\infty \, \|f - f_n\|_{\infty, K}$$

où encore

$$|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle| \leq \int |f - f_n| \, |\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f - f_n\|_1$$

où K est un compact contenat le support de φ. Il ne reste plus qu'à appliquer les hypothéses de cchaque cas pour conclure que

$$\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \to 0.$$

Remarque 1.6 *Si nous considérons un fonction continues par morceaux sue* $[0, 1]$ *et*

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \delta_{\frac{i}{n}},$$

on a$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_f$. *Cela nous conforte dans l'idée qu'une distribution physique continue de masse ou de charge électrique est l'idéalisation mathématique d'une distribution discréte trés dense. Ici* T_n *est l'approximation discréte de* f.

1.6 Dérivation des distributions

C'est sans doute la propriété la plus spectaculaire des distributions.

1.6.1 Généralités

Definition 1.9 *On appelle dans le cas* $n = 1$ *dérivée p-iéme de la distribution* T, *la distribution* $T^{(p)}$ *définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \;\; \left\langle T^{(p)}, \varphi \right\rangle = (-1)^p \left\langle T, \varphi^{(p)} \right\rangle$$

et si $n > 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *on note* $D^\alpha(T)$ *la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \;\; \langle D^\alpha(T), \varphi \rangle = -(1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha(\varphi) \rangle$$

Remarque 1.7 *Pour* $n = 1$ *le cas* $p = 1$ *implique le cas* p *quelconque.*

Remarque 1.8 *Cette définition est cohérente car si* $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, *alors* $\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi'$.

Theoreme 1.10 *On a:*

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'.$$

La preuve est trés simple.

1.6.2 Dérivation dans le cas $n = 1$

Dans cette section $n = 1$

Theoreme 1.11 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 par morceaux admettant les points de discontinuité $x_1, ..., x_m$, alors*

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{p=1}^{m} \left(f\left(x_i^+\right) - f\left(x_i^-\right)\right) \delta_{x_i}.$$

Proof. On a:

$$\begin{aligned}
\left\langle T'_f, \varphi \right\rangle &= -\left\langle T_f, \varphi' \right\rangle = -\int f\varphi' \\
&= -\left(\int_{]-\infty, x_1[} f\varphi' + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{]x_i, x_{i+1}[} f\varphi' + \int_{]x_m, +\infty[} f\varphi' \right) \\
&\underset{IPP}{=} \left(\int_{]-\infty, x_1[} f'\varphi + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{]x_i, x_{i+1}[} f'\varphi + \int_{]x_m, +\infty[} f'\varphi \right) - \left([f\varphi]_{-\infty}^{x_1} + \sum_{i=1}^{m-1} [f\varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} + [f\varphi]_{x_m}^{+\infty} \right. \\
&= \int f'\varphi - \left(f\left(x_1^-\right)\varphi\left(x_1\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \left(f\left(x_{i+1}^-\right)\varphi\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i^+\right)\varphi\left(x_i\right) \right) - f\left(x_m^+\right)\varphi\left(x_m\right) \right) \\
&= \int f'\varphi - \left(\sum_{i=1}^{m} f\left(x_i^-\right)\varphi\left(x_i\right) - \sum_{i=1}^{m} f\left(x_i^+\right)\varphi\left(x_i\right) \right) = \left\langle T_f, \varphi' \right\rangle + \sum_{i=1}^{m} \left(f\left(x_i^+\right) - f\left(x_i^-\right)\right)\varphi(
\end{aligned}$$

Definition 1.10 *On dit que la distribution T admet une primitive s'il existe une distribution U telle que $u' = T$.*

Theoreme 1.12 *Toute distribution admet une primitive et si U est une primtive de T alors les prmitives de T sont les distributions $U + \lambda C$ où C est la distribution réguliére associée à la fonction constante égale à 1.*

Proof.

1.6.3 Dérivation dans le cas $n = 3$

Soit $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dérivable da

1.6.4 Transité d'une distribution et distribution périodique

Definition 1.11 *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, la distribution définie par*

$$\langle U, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

est dite translatée de T et est notée $\tau_a T$.

Definition 1.12 *On dit que T est périodique de période a, ssi, $\tau_a T = T$.*

1.7 Produit d'une distribution par une fonction C^∞

De même que le produit de deux fonctions de classe L^1_{loc} n'est pas nécessairement une fonction de L^1_{loc}, le produit de deux distributions réuliéres n'est pas une distribution. Cependant on peut donner un sens au produit d'une distribution par une fonction indéfiment différentiable comme suit

Definition 1.13 *Si $f \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$, alors le produit fT est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle .$$

1.8 Produit de convolution des distributions

On se place dans le cas $n = 1$

1.8.1 Produit tensoriel des distributions

Definition 1.14 *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)$ deux distributions, on appelle produit tensoriel de S et T, la distribution $S \otimes T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p+q})$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{p+q}\right) \ \langle S \otimes T, (\varphi, \psi) \rangle = \langle S_x, x \to \langle T_y, y \to \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y, y \to \langle S_x, x \to \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

1.8.2 Introduction à la convolution

On a le résultat suivant

Theoreme 1.13 *Soient $f, g \in L^1_{loc}$ telles que $f * g \in L^1_{loc}$. Alors T_{f*g} est une distribution réguliére définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle f_x \otimes g_y, \varphi(x + y) \rangle .$$

Proof. On a:

$$\begin{aligned}
\langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int \left(\int f(y)\, g(x - y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx \\
&= \iint \varphi(x)\, f(y)\, g(x - y)\, dxdy \\
&= \iint \varphi(u + v)\, f(v)\, g(u)\, dudv \\
&= \iint \varphi(x + y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy \\
&= \langle f_x \otimes g_y, \varphi(x + y) \rangle .
\end{aligned}$$

On applique Fubini et le changement de variable: $u = x - y$ et $v = y$ et donc $x = u + v$ et $y = v$ et la valeur absolu du jacobien est 1.

On veut alors donner un sens si S et T sont des distributions à

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x * T_y, \varphi(x + y) \rangle .$$

C'est sans doute à ce niveau que la difficultés de compréhension est la plus grande.

Le problème est que pour $\varphi \in \mathcal{D}$, le support de $(x,y) \to \varphi(x+y)$ qui est $\overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x+y) \neq 0\}}$ n'est pas bornée en général car il est clair que si le support de φ est $[a,b]$, la support de $(x,y) \to \varphi(x+y)$ est une bande oblique de $\mathbb{R}^2$ paralléle à la seconde bissectrice et dont l'intersection avec l'axe Ox est $[a,b]$. Donc $(x,y) \to \varphi(x+y)$ est C^∞ mais $\notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ e t donc $\langle S * T, \varphi\rangle$ n'a un sens que si l'intersection du support de $S * T$ avec celui $(x,y) \to \varphi(x+y)$ est borné. Ce résultat n'est acquis que si

S et T ont des supports bornés du même côté
L'une des distributions au moins est à support compact

Nous sommes amenés à introduire les deux notions suivantes.

Definition 1.15 *L'ensemble des distributions à support compact est noté $\mathcal{E}'$.*

Proposition 1.14 *L'ensemble $\mathcal{E}'$ est un sev de $\mathcal{D}'$ qui s'identifie au dual topologique de $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Definition 1.16 *Une distribution est à support borné inférieurement (resp supérieurement) ssi il existe a tel que le support soit inclus dans $[a,+\infty[$ 'resp $]-\infty,a]$). L'ensemble de ces distributions est noté $\mathcal{D}'_+$ (resp $\mathcal{D}'_-$).*

Proposition 1.15 *L'ensemble $\mathcal{D}'_+$ (resp $\mathcal{D}'_-$) est un sev de $\mathcal{D}'$.*

1.8.3 Définition et propriété du produit de convolution

Theoreme 1.16 *Si les distributions S et T sont telles que l'une au moins des deux expressions $\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$ ou $\langle T_y, \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle$ est définie, alors l'autre est définie et elles sont égales.*

Definition 1.17 *Si on est dans les hypothéses du théorème, on pose:*

$$\langle S * T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

et $S * T$ est dite produit de convolution de S et T et on a: $_a$

$$S * T = T * S.$$

Theoreme 1.17 *Si les distributions $T_1, ..., T_n$ vérifient l'une des trois propriétés ci dessous*

P1: Toutes les distributions, sauf au plus une, sont à support bornés
P2: Toutes les distributions sont dans $\mathcal{D}'_+$ (resp $\mathcal{D}'_-$)
P3: Tous les produits de convolution deux à deux existent

alors le produit de convolution $T_1 * ... * T_n$ existe, est associatif et commutatif et est défini par

$$\langle T_1 * ... * T_n, \varphi\rangle = \langle T_1 \otimes ... \otimes T_n, \varphi(x_1 + ... + x_n)\rangle .$$

Theoreme 1.18 *Sous ls hypothéses du théorème précédent on a:*

$$\begin{array}{l}\tau_a T = \delta_a * T \\ \tau_a (S * T) = (\tau_a S) * T = S * (\tau_a T) \\ \delta^{(i)} * \delta^{(j)} = \delta^{(i+j)} \\ \delta^{(i)} * T = T^{(i)} \\ (S * T)^{(i)} = S^{(i)} * T = S * T^{(i)}\end{array}$$

Remarque 1.9 *On a:*

$$\begin{array}{c}1 * \delta' = 1' = 0 \\ (1 * \delta') * H = 0 \\ \delta' * H = H' = \delta \\ 1 * (\delta' * H) = H\end{array}$$

et donc

$$(1 * \delta') * H \neq 1 * (\delta' * H)$$

et donc la notion d'associativité doit être prise avec circonspection.

Remarque 1.10 *Ainsi pour dériver (resp translater) un produit de convolution il suffit de dériver (resp translater) l'une d'elles.*

1.8.4 Régularisation des distributions

Theoreme 1.19 *Si g est indéfiniment dérivable et T une distribution, l'application*

$$x \to \langle T_t, g(x-t) \rangle$$

est indéfiniment dérivable noté $g * T$.

Proof. On a:

$$\begin{aligned}\langle T_g * T, \varphi \rangle &= \langle T_t, \langle T_g, \varphi(x+t) \rangle \rangle \\ &= \left\langle T_t, \int g(x) \varphi(x+t)\, dx \right\rangle \\ &= \left\langle T_t, \int g(x-t) \varphi(x)\, dx \right\rangle \\ &= \langle T_t, \langle T_\varphi, \tau_t g \rangle \rangle \\ &= \langle T_t \otimes T_\varphi, \tau_t g \rangle \\ &= \langle T_\varphi, \langle T_t, g(x-t) \rangle \rangle \\ &= \int \varphi(x) \langle T_t, g(x-t) \rangle\, dx \\ &= \langle g * T, \varphi \rangle\end{aligned}$$

et donc

$$g * T = T_g * T.$$

Definition 1.18 *L'application $g * T$ est dite régularisée de T par g.*

Theoreme 1.20 *Si $T \in \mathcal{D}'$ et (g_n) une unité approchée de fonctions appartenant à $\mathcal{D}$, alors $g_n * T$ est une suite de fonctions qui converge au sens des distributions vers T.*

Theoreme 1.21 *L'espace $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}$'.*

1.8.5 Algébre de convolution

Theoreme 1.22 *Les espaces $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'_+$ et $\mathcal{D}'_-$ sont des algébres de convolutions associatives, commutatives et d'élément neutre δ_0.*

Remarque 1.11 *Les algébres précédentes sont bien adaptées à la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles qui s'écrivent sous la forme générale:*

$$A * X = B$$

et le problème est de savoir à quelles conditions sur les distributions A et B d'une algébre de convolution donnée la solution X existe et est unique.

Definition 1.19 *Dans une algébre de convolution, l'inverse de convolution X de la distribution A, si elle existe, vérifie l'équation:*

$$A * X = \delta_0.$$

L'inverse de convolution noté A^{*-1} est dite fonction ou distribution de Green de A.

Theoreme 1.23 *L'inverse de convolution d'une distribution A dans une algébre de convolution donnée est unique.*

Proof. Soit A_1 et A_2 deux inverses, on a:

$$A_2 = A_2 * \delta = A_2 * (A * A_1) = (A_2 * A) * A_1 = \delta * A_1 = A_1.$$

Theoreme 1.24 *Dans une algébre de convolution, l'équation $A * X = B$ admet une solution si A admet un inverse de convolution et dans ce cas la solutioin est unique.*

1.8.6 Application à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

Problème: Recherche dans $\mathcal{D}'_+$ de solution de

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^{(k)} = B \quad (1)$$

où les $a_k \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{D}'_+$. On supoose que $a_0 = 1$.

Astuce: $\delta^{(j)} * X = X^{(j)}$

Méthode:

Etape 1: (1) devient:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \delta^{(k)} \right) * X = B \ (1)'$$

Etape 2: On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$ et on le factorise sur $\mathbb{C}$ sous la forme

$$P = \prod_{p=0}^{n} (X - \alpha_p)$$

et comme en spé on a:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \delta^{(k)} = (\delta' - \alpha_0 \delta) * ..... * (\delta' - \alpha_n \delta) .$$

Etape 3: Recherche de l'inverse de convolution de $\delta' - \alpha\delta$. Par analogie avec le cas de la sup, on conjecture que c'est la fonction causale associée à $e^{\alpha x}$, on note:

$$[\alpha] = T_{x \to H(x) e^{\alpha x}}$$

et il faut qu'en même s'en assurer. On a:

$$[\alpha] * \delta' = [\alpha]' = [\alpha'] + \delta = \alpha [\alpha] + \delta = [\alpha] * (\alpha\delta) + \delta$$

et donc

$$[\alpha] * (\delta' - \alpha\delta) = \delta.$$

Etape 4: Via le calcul dans les algébres, la distribution de Green de $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \delta^{(k)}$ est:

$$[\alpha_0] * .... * [\alpha_n] .$$

Etape 5:

$$X = [\alpha_0] * .... * [\alpha_n] * B.$$

Remarque 1.12 *Une équation de convolution peut avoir des solutions distinctes où ne pas en avoir selon l'algébre de convolution considérée. Dans le cas de l'équation suivante*

$$\left(\delta'' + \omega^2 \delta\right) * X = B$$

admet $B * T_{x \to \frac{1}{\omega} H(x) \sin(\omega x)}$ *(resp* $B * T_{x \to -\frac{1}{\omega} H(-x) \sin(\omega x)}$*)* *dans* $\mathcal{D}'_+$ *(resp* $\mathcal{D}'_-$*) et pas de solution dans* $\mathcal{E}'$.

Ce type de méthode se généralise aux équations aux dérivées partielles, aux équations intégrales et le concept de transformation de Fourier et de Laplace.

TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS

1.9 Introduction

Il s'agit d'absorber la transformation de Fourier des fonctions par la biais des transformations réguliéres. Donc on veut

$$\begin{aligned}\langle T_{\mathcal{F}f}, \varphi\rangle &= \int \varphi\mathcal{F}f = \int \left(\left(\int e^{-2i\pi xt} f(t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx\right)\\ &= \int \left(\left(\int e^{-2i\pi xt}\varphi(x)\,dx\right) f(t)\,dt\right)\\ &= \int \mathcal{F}\varphi(t) f(t)\,dt = \langle T_f, \mathcal{F}\varphi\rangle\end{aligned}$$

et on est amené à

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}.$$

Mais pour que cela ait un sens il faudrait que $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Ce n'est pas le cas. On va donc changer l'espace des fonctions test en un espace stable par transformation de Fourier. Le choix le plus judicieux est de prendre $\mathcal{S}$ qui est stable par $\mathcal{F}$ et qui en plus contien $\mathcal{D}$ et qui est donc partout dense dans L^1 et L^2

Definition 2.1 *On appelle distribution tempérée un élément du dual topologique de $\mathcal{S}$ notée $\mathcal{S}'$.*

Remarque 2.1 *Un faisant cela on perd des distributions car on grossit l'espace des fonctions tests.*

Theoreme 2.1 *$\mathcal{S}'$ est un sev de $\mathcal{D}'$.*

Remarque 2.2 *$\mathcal{S}'$ contient:*

1) L^p pour $p > 1$
2) L'espace f des fonctions à croissance lente (il existe un entier $k \geq 1$ tel que $(1+x^2)^{-k} f$ soit mesurable bornée) (c'est cette classe de fonctions qui a suggéré à Schwartz le mot tempéré)
3) L'espas $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact
4) L'espace des distributions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_n$ où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$ dits signaux numériques
5) l'espace des distributions périodiques.

et donc $\mathcal{S}'$ est suffisamment riche pour décrire tous les signaux rencontrés en science de l'ingénieur et même ceux qu'on rencontre en physique.

Theoreme 2.2 *Toute distribution tempérée T admet une transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ définie par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{S} \ \ \langle\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle$$

Le théorème suivant résulte des propriétés de $\mathcal{S}$.

1.10 Propriétés de la transformation de Fourier et calcul symbolique

Theoreme 2.3 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ des distributions tempérées est une application linéaire bijective, bicontinue de $\mathcal{S}'$ dans lui même dont la réciproque est:*

$$\forall T \in \mathcal{S}' \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \ \left\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle.$$

Definition 2.2 *On appelle dilatée de $T \in \mathcal{S}'$ une distribution de la forme:*

$$\langle dil_a T, \varphi \rangle = \langle T, dil_a \varphi \rangle.$$

et codilatée de $T \in \mathcal{S}'$

$$codil_a T = \frac{1}{|a|} dil_{\frac{1}{a}} T$$

où $a \in \mathbb{R}^*$.

Theoreme 2.4 *Soit $T \in \mathcal{S}'$, on a:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(dil_a T) &= codil_a(\mathcal{F}T) \\
\mathcal{F}(\tau_a T) &= e^{-2i\pi ax}\mathcal{F}T \\
(\mathcal{F}T)^{(k)} &= \mathcal{F}\left((-2i\pi x)^k T\right) \\
\mathcal{F}\left(T^{(k)}\right) &= \left((2i\pi x)^k \mathcal{F}T\right).
\end{aligned}$$

Proof. On a:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(dil_a T), \varphi \rangle &= \langle T, dil_a(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \left\langle T, \mathcal{F}\left(\frac{1}{|a|} dil_{\frac{1}{a}} e^{-2i\pi ax}\varphi\right) \right\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}T, codil_a \varphi \rangle = \langle codil_a(\mathcal{F}T), \varphi \rangle \\
\langle \mathcal{F}(\tau_a T), \varphi \rangle &= \langle T, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \left\langle T, \mathcal{F}\left(e^{-2i\pi ax}\varphi\right) \right\rangle = \left\langle e^{-2i\pi ax}\mathcal{F}T, \varphi \right\rangle \\
\left\langle (\mathcal{F}T)^{(k)}, \varphi \right\rangle &= (-1)^k \left\langle \mathcal{F}T, \varphi^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \mathcal{F}\left(\varphi^{(k)}\right) \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, (2i\pi x)^k \mathcal{F}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}\left((-2i\pi x)^k T\right), \varphi \right\rangle \\
\left\langle \mathcal{F}\left(T^{(k)}\right), \varphi \right\rangle &= (-1)^k \left\langle T, (\mathcal{F}\varphi)^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \left(\mathcal{F}\left((-2i\pi t)^k \varphi\right)\right) \right\rangle \\
&= \left\langle (2i\pi x)^k \mathcal{F}T, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Theoreme 2.5 *Voici à titre d'exercice un tableau à démontrer et apprendre*

T	$\mathcal{F}T$	
δ_a	$[e^{-2i\pi ax}]$	
$\boxed{e^{2i\pi ax}}$	δ_a	
$[1]$	δ_0	
δ_0	$[1]$	*une impulsion contient toutes les fréquences*
$\delta_0^{(n)}$	$[(2i\pi x)^n]$	
$[\cos 2\pi ax]$	$\frac{\delta_a+\delta_{-a}}{2}$	
$[\sin 2\pi ax]$	$\frac{\delta_a-\delta_{-a}}{2i}$	

1.11 Produit de convolution

L'espace $\mathcal{S}'$ n'est pas une algébre de convolution; en revanche le produit de convolution d'une distribution tempérée soit avec unr distribution à support borné soit avec une fonction de $\mathcal{S}$ existent et ont de bonnes propriétés avec Fourier.

Theoreme 2.6 *Soit $f \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$, alors:*

1) $f * T$ et $(f * T)^{(k)}$ sont des fonctions C^{∞} à croissance lente
2) $\mathcal{F}(f * T) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(T)$
3) $\mathcal{F}(fT) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T)$.

Proof. Le 1 est difficile et sera admis. On a:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(f * T), \varphi \rangle &= \langle f * T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_t, \langle f_x, \mathcal{F}\varphi(x+t) \rangle \rangle \\
\langle \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(T), \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(f)\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\varphi) \rangle = \langle T, (\mathcal{F}\mathcal{F}(f)) * \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \langle T, \sigma f * \mathcal{F}\varphi \rangle = \left\langle T_t, \int f(-x)\mathcal{F}\varphi(t-x)\,dx \right\rangle = \left\langle T_t, \int f(x)\mathcal{F}\varphi(t+x)\,dx \right\rangle
\end{aligned}$$

et 2 est démontré. On a:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T)) = fT$$

et donc

$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(fT).$$

Theoreme 2.7 *Si $R \in \mathcal{E}'$ et $T \in \mathcal{S}'$ alors*

1) $R * T \in \mathcal{S}'$
2) $\mathcal{F}(R * T) = \mathcal{F}(R)\mathcal{F}(T)$

Proof. On admettra que $\mathcal{F}R$ est C^{∞} à croissance lente et $\mathcal{F}(R)\mathcal{F}(T)$ a un sens et

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(R)\mathcal{F}(T), \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(R)\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(R)\varphi) \rangle \\
&= \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}(R) * \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T_t, \langle \mathcal{F}\mathcal{F}(R)_x, \varphi(t-x) \rangle \rangle \\
&= \langle T_t, \langle R_x, \mathcal{F}\varphi(t+x) \rangle \rangle = \langle \mathcal{F}(R * T), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

1.12 Série de Fourier des distributions périodiques

Dans cette section on suppose T périodique de période a.

Theoreme 2.8 *Les fonctions périodiques localement intégrables sont des densités de distribution périodiques et si f_0 est le motif périodique de f et a la période on a:*

$$f = f_0 * \sqcup_a.$$

Proof. la fonction f_0 induit une distribution à support compact cat f_0 est à support compact et donc comme $\sqcup_a$ est une distribution tempérée $f_0 * \sqcup_a$ est tempérée et on a:

$$f_0 * \sqcup_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0 * \delta_{na} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{na} f_0 = f.$$

Theoreme 2.9 *On a:*

$$\mathcal{F}\sqcup = \sqcup.$$

Proof. On a:

$$S = \mathcal{F}\sqcup = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\delta_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[e^{-2i\pi nx}\right] = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi nx}\right]$$

On considére la fonction 1 périodique définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x$. Son développemnet en série de Fourier est

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi nx}}{n}$$

et la convergence vers f se fait au sens de $L^2_{[0,1]}$ et a donc lieu au sens des distributions et on a:

$$[f]' = -\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{2i\pi nx} = [f'] - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = [\mathbf{1}] - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$$

et

$$\mathcal{F}\sqcup = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi nx}\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = \sqcup.$$

Voici une deuxiéme preuve sans doute plus profonde mais moins naturelle. On pose

$$\chi(t) = e^{-2i\pi x}.$$

On a:

$$\tau_1 \sqcup = \sqcup$$

et donc

$$\chi \mathcal{F}\sqcup = \mathcal{F}\sqcup$$

et donc

$$(\chi - 1)\mathcal{F}\sqcup = 0.$$

Lemme 2.10 *Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie $f(0) = 0$,alors il existe $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f = xu$.*

Proof. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(x) = x \int_0^1 f'(tx)\, dt$$

et g définie par

$$u(x) = \int_0^1 f'(tx)\, dt$$

est indéfiniment dérivable et de support inclus dans celui de f.

Lemme 2.11 *Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie $f(0) = 0, T$ support inclus dans $]-1,1[$ alors il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $f = (1-\chi) g$*

Proof. En effet on a:

$$f = (1-\chi)\left(\frac{x}{(1-\chi)} u\right)$$

Or

$$\frac{1-\chi}{x} u$$

est de support inclus dans $]-1,1[$ et la fonction $\frac{1-\chi}{x}$ ne s'annule pas dans $]-1,1[$ et donc $g=\frac{x}{(1-\chi)}u\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Lemme 2.12 *Soit $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'annulant sur $\mathbb{Z}$, alors il existe h indéfiniment dérivable telle que $f=(1-\chi)h$.*

Proof. Pout tout $n\in\mathbb{Z}$ on a: $\tau_n f(0)=0$. On choisit une partition de l'unité associéé à $\left(\left]n,n+\frac{5}{2}\right[\right)$ (Voir l'exercice correspondant au tout début du cours) et posons $f_n=f\rho_n=\tau_n(f\rho)$. On applique le lemme 2 à f_n et donc

$$f_n=(1-\chi)g_n$$

et on a:

$$f=f\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho_n\right)=(1-\chi)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}g_n\right)=(1-\chi)h$$

Lemme 2.13 *Soit $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $(1-\chi)T=0$, alors T est une limite de combinaison liméaire de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Proof. Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\psi=\varphi-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(n)\theta_n$$

où $\theta_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifie $\theta_n(n)=1$. Alors $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifie $\psi(n)=0$ et donc

$$\langle T,\psi\rangle=\langle T,(1-\chi)h\rangle=\langle(1-\chi)T,h\rangle=0$$

et donc

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle T,\theta_n\rangle\varphi(n)=\left\langle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle T,\theta_n\rangle\delta_n,\varphi\right\rangle$$

et

$$T=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle T,\theta_n\rangle\delta_n$$

Lemme 2.14 $\mathcal{F}\sqcup=\sqcup$.

Proof. En utilisant le début de la pemiére preuve on sait que $\mathcal{F}\sqcup$ est $1-$périodique et avec ce qui précéde que

$$\mathcal{F}\sqcup=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\delta_n$$

et donc

$$\alpha_n=\alpha_{n+1}$$

et donc

$$\mathcal{F}\sqcup=\alpha\sqcup$$

et on teste sur $x\to e^{-\pi x^2}$ et on a:

$$\left\langle\mathcal{F}\sqcup,e^{-\pi x^2}\right\rangle=\left\langle\sqcup,e^{-\pi x^2}\right\rangle=\alpha\left\langle\sqcup,e^{-\pi x^2}\right\rangle$$

et

$$\left\langle \sqcup, e^{-\pi x^2} \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n^2} - 1$$

qui d'aprés la régle de Riemann est fini et supérieur à 1. Donc $\alpha = 1$.

Cette preuve est profonde et donne si on la généralise les distributions dont le support est inclus dans un ensemble discret comme combinaison linéaire éventuellement infinie de distributions prises dans les points de cet ensemble discret.

Theoreme 2.15 *Soit f une fonction périodique de période a et localement intégrable. Alors*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{a}} \text{ avec } c_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n\frac{t}{a}} dt$$

et

$$\mathcal{F}T_f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{\frac{n}{a}}.$$

Proof. On a:

$$f = f_0 * \sqcup_a$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([f]) &= \mathcal{F}(f_0)\,\mathcal{F}(\sqcup_a) = \mathcal{F}(f_0)\,\mathcal{F}(dil_a\sqcup) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f_0)\sqcup_{\frac{1}{a}} \\ &= \frac{1}{a}\mathcal{F}(f_0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{\frac{n}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(f_0)\left(\frac{n}{a}\right)\delta_{\frac{n}{a}} \end{aligned}$$

et on prend

$$c_n = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f_0)\left(\frac{n}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n\frac{t}{a}} dt$$

Theoreme 2.16 *Toute distribution périodique T de période a est tempérée et est égale à $T_0 * \sqcup_a$ où T_0 est une distribution de support $[0,a]$ qui représente le motif pétiodique de période T. T posséde un et un seul développement en série de Fourier:*

$$T_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n\frac{t}{a}} \text{ où } c_n = \frac{1}{a}\mathcal{F}T_0\left(\frac{n}{a}\right)$$

où T_0 étant à support compact; $\mathcal{F}T_0$ est C^∞ à croissance lente et on a:

$$\mathcal{F}T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_{\frac{n}{a}}.$$

Proof. $T_0 \in \mathcal{E}'$ et $\sqcup_a \in \mathcal{S}'$ et $T_0 * \sqcup_a \in \mathcal{S}'$ et on a:

$$\begin{aligned} \langle \tau_a(T_0 * \sqcup_a), \varphi\rangle &= \langle (T_0 * \sqcup_a), \tau_{-a}\varphi\rangle \\ &= \langle T_0(y), \langle \sqcup_a(x), \tau_{-a}\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \left\langle T_0(y), \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi((n+1)a+y)\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle T_0(y), \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(na+y) \right\rangle \\ &= \langle T_0 * \sqcup_a, \varphi \rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{F}T = \mathcal{F}T_0\mathcal{F}\sqcup_a = \frac{1}{a}\mathcal{F}T_0\sqcup_{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}T_0\left(\frac{n}{a}\right)\delta_{\frac{n}{a}}.$$

Theoreme 2.17 *Formule sommatoire de Poisson: si f est intégrable alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} [f(x-na)] \underset{ds\ \mathcal{S}'}{=} \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f\left(\frac{n}{a}\right) e^{2i\pi n\frac{x}{a}}$$

1.13 Transformation dans L^1 et L^2

Nous allons d'abord monter que nous pouvons plonger L^1 et L^2 dans $\mathcal{S}'$. (On a admis en fait que L^p pour $p>1$ est inclus dans $\mathcal{S}'$.)

Theoreme 2.18 *L'application $f \to T_f$ envoie L^1 et L^2 dans $\mathcal{S}'$ et on peut donc regarder les distributions réguliéres associées à des applictions de L^1 et L^2 comme des distributions tempérées.*

Proof. Si $f \in L^1$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ on a:

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int f\varphi\right| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$$

et si $f \in L^1$ et $\varphi \in \mathcal{S}$ on a:

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int f\varphi\right| \underset{IS}{\leq} \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

et T_f est bien définie et c'est une distribution tempérée.

Le cas L^p se traite aisément si on connait l'inégalité de Jordan-Hölder qui généralise l'inégalité de Schwartz.

Theoreme 2.19 *Si $f \in L^1$, alors*

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$$

où

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-2i\pi xt} f(t)\,dt$$

est une application continue tendant vers 0 losque $|x| \to +\infty$. De plus si f et $\mathcal{F}f \in L^1$ on a:

$$\mathcal{F}^2 f = \sigma f.$$

Proof. On a:

$$\forall\varphi \ \in \ \mathcal{S} \quad \langle \mathcal{F}T_f, \varphi\rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \int f(x)\left(\int e^{-2i\pi tx}\varphi dt\right) dx$$

$$\underset{Fubini}{=} \int \varphi(t) \left(\int e^{-2i\pi tx} f(x)\, dx \right) dt$$
$$= \int \varphi(t)\, \mathcal{F}f(t)\, dt = \langle T_{\mathcal{F}f}, \varphi \rangle$$

car

$$\int \int \left| e^{-2i\pi tx} f(x) \varphi(t) \right| dtdx = \int \int |f(x) \varphi(t)|\, dtdx = \|f\|_1 \|\varphi\|_1$$

Le reste de la proposition résulte du théorème de dérivation sous le signe somme et du lemme de Riemann-Lebesgue.

De plus dans $\mathcal{S}'$ on a:

$$\mathcal{F}^2 T = \sigma T.$$

Dans ce cas particulier on a:

$$\mathcal{F}^2 T_f = T_{\mathcal{F}^2 f} = \sigma T_f = T_{\sigma f}$$

et donc

$$\mathcal{F}^2 f = \sigma f \ \ pp$$

et donc

$$\mathcal{F}^2 f = \sigma f \ \text{ dans } L^1$$

Theoreme 2.20 *L'application $\mathcal{F}$ est une isométrie de L^2 dans lui même lorsqu'on identifie L^2 à un sev de $\mathcal{S}'$.*

Proof. On sait que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \ \ \|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$$

et que $\mathcal{S}$ est dense dans L^2. Soit $T \in L^2$ et (T_n) une suite de $\mathcal{S}$ tendant vers L^2. Comme (T_n) est une suite de Cauchy dans L^2 et que l'on a:

$$\|\mathcal{F}T_p - \mathcal{F}T_q\|_2 = \|\mathcal{F}(T_p - T_q)\|_2 = \|T_p - T_q\|_2$$

alors $(\mathcal{F}T_n)$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc $\mathcal{F}T_n$ tend vers $\mathcal{F}T$ dans $\mathcal{S}'$ et comme L^2 est complet $\mathcal{F}T \in L^2$. Enfin on a:

$$\|\mathcal{F}T_n\|_2 = \|T_n\|_2$$

et donc en passant à la limite on a:

$$\|\mathcal{F}T\|_2 = \|T\|_2$$

Remarque 2.3 *On voit ainsi que la transformation de Fourier dans L^1 et dans L^2 ne sont que des cas particuliers de la transformation de Fourier des distributions et que la méthode la plus rapide pour intriduire cette transformation si importante consisterait à traiter la transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz, de la traiter à fond, de passer ensuite aux distributions rempérées et de voir la transformation de fourier des fonctions de L^1 et la transformation de Fourier-Plancherel comme des cas particuliers. C'est sans aucun doute la méthode la plus rapide. Est-elle pédagogiquement recevable?*